15/11/2015

سكشن 6 رياضة

AMR M.Y

(9)

مفكوك تايلور وماكلورين

الدالة analytic

$$F(z) = F(z_0) + \frac{F'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{F''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

maclurin

$$z_0 \longrightarrow 0$$

Some important

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$
2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$
3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$
4. $\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!}$
5. $\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$
6. $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$
7. $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$

b

Find maclaurine series :

1) $F(z) = z \cdot e^{z-1}$

$$= z\left[1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \cdots\cdots\right.$$

2) $F(z) = \ln\left(\frac{4z}{1-z}\right)$

$$= \ln(1+z) - \ln(1-z)$$

معفوظة ∴ $\int \frac{1}{1-z} = \int 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$

بالتكامل

$$-\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \longrightarrow [1]$$

معفوظة $\int \frac{1}{1+z} = \int 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$

بالتكامل

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \longrightarrow [2]$$

بطرح [1] من [2] ينتج المطلوب ※

3) laurant series. أي اي دالة غير analytic

$$\frac{1}{z - z_0} = ??$$

[1] [C]

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

$$= \frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{(z-1)}$$

$$A = \left.\frac{1}{(z-1)}\right)_{z=2} = 1 \quad , \quad B = \left.\frac{1}{z-2}\right)_{z=1} = -1$$

$$F(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{-1}{z-1}$$

[أ] $|z| < 1$ حيث ان

خد الرقم عامل مشترك.

$$F(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{-1}{(z-1)} = \frac{1}{-2\left(1 - \frac{z}{2}\right)} + \frac{1}{1 - z}$$

$$= \frac{-1}{2}\left[1 + \left(\frac{z}{2}\right) + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^3 + \cdots\right] + \left[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right]$$

[ب] $|z| > 2$ شرط خد الرمز عامل مشترك

$$\hookrightarrow \frac{1}{|z|} < \frac{1}{2}$$

$$F(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{-1}{(z-1)} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{2}{z}\right)} + \frac{-1}{z\left(1 - \frac{1}{z}\right)}$$

$$= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \cdots\right] - \frac{1}{z}\left[1 + \left(\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \cdots\right]$$

d

ج $1<|z|<2$ شرط

$|z|>1$ ⟶ بأخذ الرمز عامل مشترك

$|z|<2$ ⟶ بأخذ الرقم عامل مشترك

$$\frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)} + \frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

وبالمثل

د $|z-1|<1$

$$\frac{1}{(z-1)-1} \quad , \quad \frac{-1}{z-1}$$

بأخذ الرقم عامل مشترك

$$\frac{1}{-1\left(1-|z-1|\right)} - \frac{1}{z-1} = -\left[1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots\right] - \frac{1}{(z-1)}$$

e

singularity أصفار المقام

removable

قيم أصفار المقام وعندها يكون البسط = صفر

$$\lim_{z \to z_0} \neq \infty$$

Ex

$$\oint \frac{\sin z}{z}$$

$z = 0$

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq \infty$$

$$\text{Res } F(z) = 0$$

$$\oint \quad = 0$$

Poles

أصفار المقام عدد محدود

① simple Poles

$$\text{Res } F(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) F(z)$$

② Pole of order [1]

$$\text{Res } F(z) = \frac{1}{n!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^n}{dz} \left[(z - z_0)^{n+1} F(z) \right]$$

$$\oint F(z)\, dz = 2\pi i \text{ Res } F(z)$$

essntilly

أصفار المقام عدد لا نهائي

$$e^{1/z},\ \cos\left(\frac{1}{z}\right),\ \sinh\left(\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{1-\frac{1}{z}}, \ldots$$

$$\text{Res } F(z) = a_{-1}$$

F

Find Residue of

$$F(z) = \frac{2z + 1}{(z+4)(z-1)^2}$$

at 1) $z = -4$

$$\operatorname{Res} F(z) = \lim_{z \to -4} (z+4) \cdot \frac{2z+1}{(z+4)(z-1)^2}$$

$$F(z) = \frac{-7}{25}$$

at 2) $z = 1$

$$\operatorname{Res} F(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to +1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \cdot \frac{2z+1}{(z+4)(z-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{2(z+4) - (2z+1)}{(z+4)^2}$$

$$\operatorname{Res} F(z) = \frac{7}{25}$$

$$\oint \frac{F(z)}{(z-a)} = 2\pi i * \frac{-7}{25} + 2\pi i * \frac{7}{25}$$

2 $\oint \sinh\frac{1}{z}\, dz$

$$\oint \left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^5}{5!} + \cdots$$

التكامل $a_{-1} = 1$ ⟵ (1) بسط القوى الذى أسه ب (a_{-1}) *

$= (1) * 2\pi i$